CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2002

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

Durée : 3 heures
Calculatrices interdites

Notations et définitions.

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $M_{(p,n)}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels.
$M_n(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On rappelle que deux matrices A et B appartenant à $M_{(p,n)}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q, carrée, inversible d'ordre n telles que B = PAQ.
A étant un élément de $M_{(p,n)}(\mathbb{R})$, on appelle noyau de A, noté Ker(A) le sous-espace vectoriel de $M_{(n,1)}(\mathbb{R})$: $\mathrm{Ker}(A) = \{X \in M_{(n,1)}(\mathbb{R}) / AX = 0\}$.
On appelle Image de A le sous-espace vectoriel de $M_{(p,1)}(\mathbb{R})$, noté Im(A) :
$\mathrm{Im}(A) = \{AX, X \in M_{(n,1)}(\mathbb{R})\}$.
Un sous-groupe $\mathcal{J}$ de $(M_n(\mathbb{R}),+)$ est appelé un idéal à droite de $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :
$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{J}, AM \in \mathcal{J}$.
Un sous-groupe $\mathcal{J}$ de $(M_n(\mathbb{R}),+)$ est appelé idéal à gauche de $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :
$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{J}, MA \in \mathcal{J}$.
Si $\mathcal{J}$ est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on dit que $\mathcal{J}$ est un idéal bilatère de $M_n(\mathbb{R})$.
On désigne par I la matrice identité d'ordre n.

I) Résultats préliminaires.

Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, on suppose A de rang r.
1) Soit u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
a) Soit $(e_{r+1},e_{r+2},.....,e_n)$ une base du noyau de u, montrer l'existence d'une famille de vecteurs $(e_1,e_2,.....,e_r)$ tel que : $(e_1,e_2,.....,e_r,e_{r+1},e_{r+2},.....,e_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(e_1,e_2,.....,e_r)$ est un supplémentaire de Ker(u).
En déduire que le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1,e_2,.....,e_r)$ est isomorphe à Im(u).
En déduire que $(u(e_1),u(e_2),.....,u(e_r))$ est une base de Im(u).

Tournez la page S.V.P.

c) Peut-on compléter la famille $(u(e_1),u(e_2),.....,u(e_r))$ en une base de $\mathbb{R}^n$?

En déduire que A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où I_r désigne la matrice identité d'ordre r et 0 une matrice nulle de taille convenable.

2) Soit D une matrice diagonale d'ordre n telle que : r éléments de la diagonale sont égaux à 1, les n-r autres sont nuls.
Montrer que A est équivalente à D.

II) Application.

On considère une application f de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, différente des constantes 0 et 1, telle que :
$\forall (A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$.

1) Montrer que pour toute matrice inversible A de $M_n(\mathbb{R})$, f(A) est non nul.

2) A est une matrice de rang r, strictement inférieur à n.
a) Montrer l'existence de r+1 matrices, notées A_1, A_2..... A_{r+1} , toutes équivalentes à A et telles que le produit A_1 A_2..... A_{r+1} soit nul.

b) En déduire que f(A) = 0.

3) Que peut-on en conclure pour l'application f ?
Donner un exemple d'une telle application.

III) Idéaux bilatères de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{J}$ un idéal bilatère de $M_n(\mathbb{R})$.
1) Montrer que si $I \in \mathcal{J}$, alors $\mathcal{J} = M_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que si $\mathcal{J}$ contient une matrice inversible, alors $\mathcal{J} = M_n(\mathbb{R})$.

3) On suppose que $\mathcal{J}$ n'est pas réduit au vecteur nul de $M_n(\mathbb{R})$.
Soit A une matrice de rang r (non nul) appartenant à $\mathcal{J}$.
a) Montrer que $\mathcal{J}$ contient la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer l'existence de n-r+1 matrices, notées A_1, A_2..... A_{n-r+1} , toutes équivalentes à A et telles que la somme $A_1 + A_2 +$..... $+ A_{n-r+1}$ soit une matrice inversible.

4) Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $M_n(\mathbb{R})$?

IV) Idéaux à droite de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Soit E un sous-espace vectoriel de $M_{(n,1)}(\mathbb{R})$.
On désigne par $\mathcal{J}_E$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$:
$\mathcal{J}_E = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / E \text{ contient } Im(A)\}$.
Montrer que $\mathcal{J}_E$ est un idéal à droite de $M_n(\mathbb{R})$.

2) Soit A un élément de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et B un élément de $M_{(n,q)}(\mathbb{R})$. On suppose que Im(B) est contenue dans Im(A). *On veut montrer qu'il existe une matrice C appartenant à* $M_{(p,q)}(\mathbb{R})$ telle que B = AC.
On fixe un supplémentaire S de Ker(A) dans $M_{(p,1)}(\mathbb{R})$.
a) Justifier que l'application ϕ définie par : $X \rightarrow AX$ définit un isomorphisme de S dans Im(A).

b) Soit $(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_q)$ la base canonique de $M_{(q,1)}(\mathbb{R})$.
Justifier l'existence, pour tout i compris entre 1 et q, d'un unique élément ε_i de S tel que $A\varepsilon_i = Be_i$.

c) Soit C l'élément de $M_{(p,q)}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les matrices $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \ldots\ldots\ \varepsilon_q$.
On pose $C = [\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \ldots\ldots\ \varepsilon_q]$.
Montrer que B = AC.

3) Soient A, B et C trois éléments de $M_n(\mathbb{R})$ tels que : Im(A) + Im(B) contient Im(C).
a) On désigne par D = (A,B) la matrice de $M_{(n,2n)}(\mathbb{R})$ obtenue en juxtaposant les matrices A et B, c'est-à-dire que les n premières colonnes de D sont celles de A et les n dernières celles de B.
Montrer que Im(D) = Im(A) + Im(B).

b) En déduire l'existence d'une matrice W appartenant à $M_{(2n,n)}(\mathbb{R})$ telle que : C = DW.

c) En déduire l'existence de deux matrices U et V appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telles que :
C = AU + BV.

4) Soit $\mathcal{J}$ *un idéal à droite de* $M_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que :
$\forall\ M \in \mathcal{J}$, rang(M) $\leq$ r.
Montrer qu'il existe $M_0 \in \mathcal{J}$ tel que rang(M_0) = r.
b) Soit M un élément quelconque de $\mathcal{J}$.
On suppose que Im(M) n'est pas contenue dans Im(M_0).
En utilisant le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$: Im(M) + Im(M_0), montrer l'existence d'un élément de $\mathcal{J}$ de rang strictement supérieur à r.
c) *Déduire des questions précédentes que* $\mathcal{J}$ *est contenu dans* $\mathcal{J}_{Im(M_0)}$.

5) Montrer que $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{Im(M_0)}$.

V) Idéaux à gauche de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Soit E un sous-espace vectoriel de $M_{(n,1)}(\mathbb{R})$. On désigne par $\mathcal{J}_E$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$:
$\mathcal{J}_E = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / \text{Ker}(M) \text{ contient } E\}$.
Montrer que $\mathcal{J}_E$ est un idéal à gauche de $M_n(\mathbb{R})$.

Tournez la page S.V.P.

2) a) on désigne par u un homomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, v un homomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$.
On suppose que Ker(v) contient Ker(u).
Montrer qu'il existe un homomorphisme w de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ tel que : v = w o u.

b) Soit $A \in M_{(p,n)}(\mathbb{R})$, $B \in M_{(q,n)}(\mathbb{R})$, telles que Ker(B) contient Ker(A). Déduire de la question précédente qu'il existe $C \in M_{(q,p)}(\mathbb{R})$ telle que B = CA.

3) Soient A, B et C trois matrices carrées d'ordre n telles que :
Ker(C) contient Ker(A)$\cap$ Ker(B).
Montrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n, U et V, telles que :
C = UA + VB.

4) Déterminer les idéaux à gauche de $M_n(\mathbb{R})$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE. – D'après documents fournis.